جامعة البعث   امتحانات الدورة الفصلية الأولى ٢٠١٢-٢٠١٣   المدة : ساعتان
كلية العلوم   سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (١)   العلامة:(١٠٠) درجة
قسم الرياضيات   لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

جواب السؤال الأول (٧+٧+١١= ٢٥ درجة):

كي يكون d_2 تابع مسافة يجب أن يحقق شروط المسافة :

(١)

$$\text{i)}\ d_2(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y \qquad ; \ x,y\in X$$
$$\text{ii)}\ d_2(x,y)=d_2(y,x) \qquad ; \ x,y\in X$$
$$\text{iii)}\ d_2(x,z)\le d_2(x,y)+d_2(y,z) \qquad ; \ x,y,z\in X$$

-i

(2)

$$d_2(x,y)=0 \Rightarrow \rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_2^2(x_2,y_2)=0 \Rightarrow$$
$$\rho_1(x_1,y_1)=0 \Leftrightarrow x_1=y_1 \qquad (*_1)$$

لأن ρ_1 تابع مسافة على X_1 . كما أن : $\rho_2(x_2,y_2)=0 \Leftrightarrow x_2=y_2 \qquad (*_2)$

لأن ρ_2 تابع مسافة على X_2 . من $(*_1)$ و $(*_2)$ ينتج :

$$\left.\begin{matrix} x_1=y_1 \\ x_2=y_2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x=y$$

-ii

(2)

$$d_2(x,y)=\left[\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_2^2(x_2,y_2)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\rho_1^2(y_1,x_1)+\rho_2^2(y_2,x_2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

لأن ρ_1 تابع مسافة على X_1 و ρ_2 تابع مسافة على X_2. عندئذ يكون :

$$d_2(x,y)=\left[\rho_1^2(y_1,x_1)+\rho_2^2(y_2,x_2)\right]^{\frac{1}{2}}=d_2(y,x)$$

-iii من أجل $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$ و $z=(z_1,z_2)$ يكون :

(2)

$$d_2^2(x,z)=\rho_1^2(x_1,z_1)+\rho_2^2(x_2,z_2)\le\left[\rho_1(x_1,z_1)+\rho_2(x_2,z_2)\right]^2$$

نجذر الطرفين

$$d_2(x,z)\le\rho_1(x_1,z_1)+\rho_2(x_2,z_2)\le\rho_1(x_1,y_1)+\rho_1(y_1,z_1)+$$
$$\rho_2(x_2,y_2)+\rho_2(y_2,z_2)\le(\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_1^2(y_1,z_1)+\rho_2^2(x_2,y_2)+\rho_2^2(y_2,z_2))^{\frac{1}{2}}\Rightarrow$$

نربع الطرفين و بالإعتماد على أن $a,b\ge 0\ ;\ a+b\le(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ نجد :

$$d_2^2(x,z)\le\left[\sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_2^2(x_2,y_2)}+\sqrt{\rho_1^2(y_1,z_1)+\rho_2^2(y_2,z_2)}\right]^2$$

نجذر الطرفين نجد :

Scanned by CamScanner

تابع السابق

$$\begin{cases} d_2(x,z) = \left[\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_2^2(x_2,y_2)\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\rho_1^2(y_1,z_1)+\rho_2^2(y_2,z_2)\right]^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow d_2(x,z) \le d_2(x,y) + d_2(y,z) \quad ; \quad x,y,z \in X \end{cases}$$

بما أن الشروط الثلاثة أعلاه محققة فإن d_2 يمثل تابع مسافة على X .

(1) ب)- بفرض $z^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ متتالية كوشي من الفضاء X حيث $x_1^{(n)} \in X_1 \ \& \ x_2^{(n)} \in X_2$

عندئذ فإن $d_2(z^{(n)}, z^{(m)}) < \varepsilon$.

(2) بما أن $z^{(n)}$ متتالية كوشي فإن : $d_2^2(z^{(n)}, z^{(m)}) = \rho_1^2(x_1^{(n)}, x_1^{(m)}) + \rho_2^2(x_2^{(n)}, x_2^{(m)}) < \varepsilon^2$

(2) وهذا يعني : $\rho_1^2(x_1^{(n)}, x_1^{(m)}) < \varepsilon^2$ و $\rho_2^2(x_2^{(n)}, x_2^{(m)}) < \varepsilon^2$ أي أن كلاً من هاتين المتتاليتين $\{x_1^{(n)}\}$ و $\{x_2^{(n)}\}$ هي متتالية كوشي في X_1 و X_2 على الترتيب . وكي نضمن تقارب كلاً من هاتين المتتاليتين يلزم ويكفي أن يكون X_1 تاماً و X_2 تاماً .

(2) فبفرض أن $x_1^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} x_1^0 \in X_1$ و $x_2^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} x_2^0 \in X_2$ عندئذ يصبح

$$z^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \underset{n\to\infty}{\to} z^{(0)} = (x_1^0, x_2^0) \in X_1 \times X_2 = X$$

إذن كي يكون الفضاء X تاماً يلزم ويكفي أن يكون X_1 و X_2 تامان .

(3) ج)- نقول عن النظمين $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ أنهما متكافئين إذا وجد عددين موجبين A و B بحيث يتحقق

$$\|.\|_1 \le A\,\|.\|_2 \qquad \& \qquad \|.\|_2 \le B\,\|.\|_1$$

لدينا النظيم $\|.\|_1$ يستخرج من d_1 بوضع $y = \theta = (\theta_1, \theta_2)$ من X بذلك يكون :

(1)
$$d_1(x,\theta) = \|x\|_1 = \|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2}$$

كما أن : (1)
$$d_2(x,\theta) = \|x\|_2 = \left[\|x_1\|_{X_1}^2 + \|x_2\|_{X_2}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

لنبرهن تكافؤ النظيمين

(2)
$$\|x\|_1^2 = \left[\|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2}\right]^2 \le 2\left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\right)$$

وذلك لأن
$$0 \le (\|a\| - \|b\|)^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\| \Rightarrow 2\|a\|\|b\| \le \|a\|^2 + \|b\|^2$$

وبالتالي :
$$\|x\|_1^2 \le \sqrt{2}\left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Scanned by CamScanner

بوضع $A=\sqrt{2}$ يتحقق : $\quad (1) \quad \|x\|_1 \le A\,\|x\|_2$.ولنثبت المتراجحة الثانية .

$$\|x\|_2^2 \le \|x_1\|^2+\|x_2\|^2 = \|x_1\|^2+\|x_2\|^2+2\|x_1\|\|x_2\| = (\|x_1\|+\|x_2\|)^2 = \|x\|_1^2$$

بوضع $B=1$ يتحقق : $(2) \quad \|x\|_2 \le B\,\|x\|_1$ من (1) و (2) ينتج تكافؤ النظيمين حسب التعريف

ملاحظة : إذا أثبت الطالب تكافؤ النظيمين بطريقة أخرى تتوافق مع النتيجة بأن النظيمين متكافئين يحصل الطالب على العلامة المخصصة لهذا الجزء من السؤال .

جواب السؤال الثاني (١٥ درجة):

إذا كان $x=\theta$ أو $y=\theta$ فالمساواة واضحة تماماً وإذا كان $x=\alpha y$ يكون لدينا :

$$\begin{aligned}|\langle x,y\rangle|^2 &= |\langle \alpha y,y\rangle|^2 = \langle \alpha y,y\rangle.\overline{\langle \alpha y,y\rangle}\\ &= \alpha.\bar{\alpha}.\langle y,y\rangle.\langle y,y\rangle\\ &= \langle \alpha y,\alpha y\rangle.\langle y,y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle\end{aligned}$$

وبالتالي يكون : $\quad |\langle x,y\rangle| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.\sqrt{\langle y,y\rangle}$

الآن من أجل أي عنصرين $x,y\in H$ بحيث $\langle x,y\rangle \ne 0$ ومن أجل أي عدد عقدي λ يكون لدينا :

$$\langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle \ge 0$$

$$\langle x,x\rangle - \bar{\lambda}\langle x,y\rangle - \lambda\langle y,x\rangle + |\lambda|^2\langle y,y\rangle \ge 0$$

• نأخذ : $\lambda := \dfrac{\langle x,x\rangle}{\langle y,x\rangle}$ فنجد أنّ :

$$\langle x,x\rangle - \langle x,x\rangle - \langle x,x\rangle + \frac{\langle x,x\rangle^2}{|\langle y,x\rangle|^2}\langle y,y\rangle \ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{\langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle}{|\langle y,x\rangle|^2} \ge 1 \Rightarrow |\langle y,x\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle$$

وأخيراً فإنّ : $\quad |\langle x,y\rangle| \le \sqrt{\langle x,x\rangle}.\sqrt{\langle y,y\rangle}$

جواب السؤال الثالث (١٥+١٠=٢٥ درجة):

١- الفضاء E^* بالتعريف هو مجموعة كل الداليات الخطية والمستمرة المعرفة على E .

لتكن $\{f_n\}$ متتالية كوشي في E^* . هذا يعني أنه من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ يوجد عدد $n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون: $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$ من أجل $n,m>n_0(\varepsilon)$. وبالتالي من أجل أي $x\in E$ يكون:

$$|f_n(x)-f_m(x)| \le \|f_n-f_m\|\,\|x\| < \varepsilon\|x\|_E \quad (1)$$

وبذلك تكون $\{f_n(x)\}$ متتالية كوشي عددية (متتالية أساسية) من أجل كل $x\in E$ وبالتالي فهي متقاربة. لنضع : $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \;;\; x\in E$ ولنتأكد أن f دالي خطي ومستمر على E.

Scanned by CamScanner

(1)

من (1) و (2) نجد أنَّ :

$$\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

أي أن $\left(\mathbb{R}^n\right)^* = \mathbb{R}^n$

<u>**جواب السؤال الرابع (١٥ درجة) :**</u>

(3)

إنَّ A **خطي لأنَّ** : $\quad \forall x_1(t), x_2(t) \in C[0,\infty[\quad \& \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$A\left(\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)\right) = t\left(\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)\right) = \lambda t\, x_1(t) + \mu t\, x_2(t)$$
$$= \lambda A\, x_1(t) + \mu A\, x_2(t)$$

و بالتالي فإنَّ A خطي .

(3)

إنَّ A **غير محدود** لأنه لو أخذنا المتتالية $x_n(t) = \dfrac{n}{n+t}$ فإنَّ :

$$\|x_n\| = \sup_{t\in[0,\infty[} \frac{n}{n+t} = 1$$

$$\|A\, x_n\| = \sup_{t\in[0,\infty[} \frac{nt}{n+t} = n$$

و ذلك لأنَّ : $\left(\dfrac{nt}{n+t}\right)' = \dfrac{n^2}{(n+t)^2} \geq 0$ متزايد دوماً لذلك فإنَّ :

(3)

$$\sup_{t\in[0,\infty[} \frac{nt}{n+t} = \lim_{t\to\infty} \frac{nt}{n+t} = n$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax_n\| = \sup_{\|x\|\leq 1} n = \infty$$

وبالتالي فإنَّ A غير محدود .

إنَّ A **مغلق** لأنه لو أخذنا :

(3)

$$x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$$
$$Ax_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} y(t)$$

وبالتالي يكون :

$$x_n(t) + Ax_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t) + y(t)$$
$$(1+t)x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t) + y(t)$$
$$x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x(t)+y(t)}{(1+t)}$$

ولكن لدينا بحسب الفرض أن : $x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$ و هذا يعطينا أنَّ :

Scanned by CamScanner

3 $\left\{ x(t) = \dfrac{x(t)+y(t)}{(1+t)} \Rightarrow y(t) = t\,x(t) = Ax(t) \right.$

وحيث إن $x \in D_A$ واعتماداً على تعريف المؤثر المغلق يكون A مغلقاً .

جواب السؤال الخامس (٢٠ درجة):

لنأخذ العنصرين $x_1 = (\xi_1, \xi_2, ...)$ و $x_2 = (\zeta_1, \zeta_2, ...)$ من الفضاء ℓ_2 عندئذ :

2 $$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = T(\alpha\xi_1 + \beta\zeta_1, \alpha\xi_2 + \beta\zeta_2, ...) = (\frac{\alpha\xi_1 + \beta\zeta_1}{1}, \frac{\alpha\xi_2 + \beta\zeta_2}{2}, ...) =$$

2 $$\alpha(\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, ...) + \beta(\frac{\zeta_1}{1}, \frac{\zeta_2}{2}, ...) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$$

إذن T خطي . ولنبرهن أنه محدود .

2 $$\|T(x)\|_{\ell_2} = \left\|(\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, ...)\right\|_{\ell_2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\xi_i}{i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq c\|x\|$$

حيث $x = (\xi_i)$. هذا يعني إن T محدود ، وهنا $C = 1$. 2

لنوجد $\|T\|$: 2 $\|T(x)\|_{\ell_2} \leq \|x\| \Rightarrow \sup\limits_{\substack{x\in\ell_2 \\ x\neq\theta}} \dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq 1 \Rightarrow \|T\| \leq 1$ (1)

2 من جهة أخرى لنأخذ $\sigma = (1,0,0,....)$ من الفضاء ℓ_2 عندئذ $\|\sigma\| = 1$ كما أن : $\|T(\sigma)\| = 1$.

كما أن $\sup\limits_{\substack{x\in\ell_2 \\ x\neq\theta}} \|T(x)\| \geq \sup\limits_{\substack{\sigma\in\ell_2 \\ \|\sigma\|=1}} \|T(\sigma)\| = 1$ أي أن (2) $\|T\| \geq 1$.

من (1) و (2) نستنتج أن $\|T\| = 1$. 2

نفرض أن $y = (\eta_i)$ وأن $T^*(y) = (z_i)$; $i = 1, 2, 3, ...$ وكما هو معلوم من أجل

2 $x_1 = (\xi_1, \xi_2, ...)$ و $x_2 = (\zeta_1, \zeta_2, ...)$ من الفضاء ℓ_2 فإن الجداء الداخلي في ℓ_2 يعطى بالعلاقة :

$\langle x_1, x_2 \rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\zeta_i}$. بالتالي يكون : $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\xi_i}{i}\overline{\eta_i} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{z_i}$

بالمطابقة بين الطرفين نجد : $z_1 = \dfrac{\eta_1}{1}, z_2 = \dfrac{\eta_2}{2}, ..., z_n = \dfrac{\eta_n}{n}$ بذلك فإن : 2

$T^* y = (\dfrac{\eta_1}{1}, \dfrac{\eta_2}{2}, ..., \dfrac{\eta_i}{i}, ...)$. من هذا نستنتج أن $T^* = T$ أي أن المؤثر مترافق ذاتياً . 2

حمص في ١٤ / ١ / ٢٠١٣ م. انتهت الإجابات مدرس المقرر

الدكتور سامح العرجه

Scanned by CamScanner

جواب السؤال الأول (٢٠ درجة):

لناخذ $C(\mathbb{R})$ فضاء كل المتتاليات الحقيقية المتقاربة ولنعرف المسافة:

$$d(x,y)=\sup|x_i-y_i| \quad ; \; x=\{x_i\} \wedge y=\{y_i\}$$

ولتكن $\{x^{(n)}\}$ متتالية كوشي عندئذٍ من أجل كل $0<\varepsilon$ يوجد عدد $N_0=N_0(\varepsilon)$ بحيث يكون:

$$d(x^{(n)},x^{(m)})<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup\left|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}\right|<\varepsilon \; ; \; \forall i$$

ومنه نجد أن $\{x_i^{(n)}\}$ هي متتالية كوشي في $\mathbb{R}$ وبما أن الفضاء $\mathbb{R}$ تام فإنه يوجد x_i بحيث:

$$\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}=x_i \; ; \; \forall i \; , \; n>N_0$$

أي أن :

$$\left|x_i^{(n)}-x_i\right|<\varepsilon \;\Rightarrow\; \sup\left|x_i^{(n)}-x_i\right|<\varepsilon \;\Rightarrow d(x^{(n)},x)<\varepsilon$$

هذا يعني أنّ $\{x^{(n)}\}$ متتالية متقاربة من x، بقي إثبات أن $x\in C(\mathbb{R})$ فيتم المطلوب.

ليكن $N=N_0$ وبما أن $\{x_i^{(N)}\}\in C(\mathbb{R})$ فهي إذاً متتالية كوشي أي أن :

$$\left|x_i^{(N)}-x_j^{(N)}\right|<\varepsilon \; ; \; i,j>N(\varepsilon)$$

بالتالي من أجل : $i,j>N(\varepsilon)$ يكون :

$$\left|x_i-x_j\right|=\left|x_i-x_i^{(N)}+x_i^{(N)}-x_j+x_j^{(N)}-x_j^{(N)}\right|\le$$

$$\le d(x,x^{(N)})+d(x^{(N)},x)+\left|x_i^{(N)}-x_j^{(N)}\right|\le\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

أي أن $x=\{x_i\}$ هي متتالية كوشي في $\mathbb{R}$ فهي متقاربة في $\mathbb{R}$ أي أنّ $x\in C$.

جواب السؤال الثاني (٢٠ درجة):

ليكن H_1 فضاء جزئي من فضاء هيلبرت H ، مهما تكن x من H فإن x تكتب بالشكل $x=x_1+x_2$ حيث $x_1\in H_1, x_2\in H_1^{\perp}$ و هذا التمثيل وحيد .

لنأخذ المجموعة M بالشكل $M=\{y\in H : y=x+z ; z\in H_1\}$

فإذا كان $y_1=x+z_1$ و $y_2=x+z_2$ عنصرين من M فعندئذ نلاحظ أن:

$$ty_1+(1-t)y_2\in M \quad ; \quad 0\le t\le 1$$

[illegible]

Scanned by CamScanner

2 لهذا فإن M مجموعة محدبة و هي مغلقة لأن H_1 مغلق و بالتالي يوجد في M عنصر x_2 ذو نظيم أصغري : $x_2 = \underbrace{x}_{\in H} - \underbrace{x_1}_{\in H}$. لنبين أن $x_2 \in H_1^{\perp}$ ليتم المطلوب .

بما أن x_2 ذو نظيم أصغري فعندئذ أي عنصر سيكون نظيمه أكبر من $\|x_2\|$ أي أن :

2

$$\|x_2\|^2 \le \left\| \underbrace{x_2 - \frac{\langle x_2, z\rangle}{\|z\|^2} z}_{\in M} \right\|^2 =$$

2

$$\|x_2\|^2 + \frac{|\langle x_2, z\rangle|^2}{\|z\|^4}\|z\|^2 - \frac{|\langle x_2, z\rangle|}{\|z\|^2}\langle z, x_2\rangle - \frac{\overline{|\langle x_2, z\rangle|}}{\|z\|^2}\langle x_2, z\rangle$$

2

$$\Rightarrow -\frac{|\langle x_2, z\rangle|^2}{\|z\|^2} \ge 0$$

2 و هذا غير ممكن إلا إذا كان $\langle x_2, z\rangle = 0$ أي إذا كان $x_2 \perp z$ و بما أن z اختياري من H_1 فإن $x_2 \perp H_1$ إذا $x_2 \in H_1^{\perp}$ و بالتالي: $x = x_1 + x_2 \quad ; x_1 \in H_1 \ , x_2 \in H_1^{\perp}$

لنفرض جدلا وجود تمثيل آخر لـــ x هو $x = x_1' + x_2' \quad ; \quad x_1' \in H_1, x_2' \in H_2$

2 عندئذ يكون : $x_1 - x_1' = x_2' - x_2$ ولكن $(x_1 - x_1') \in H_1 \ , \ (x_2' - x_2) \in H_1^{\perp}$

2 و بالتالي: $0 = \langle x_2' - x_2, x_1 - x_1'\rangle = \langle x_1 - x_1', x_1 - x_1'\rangle = \langle x_2' - x_2, x_2' - x_2\rangle$

و منه فإن :

$$x_2' - x_2 = \theta \Rightarrow x_2' = x_2$$

2

$$x_1 - x_1' = \theta \Rightarrow x_1 = x_1'$$

أي أن التمثيل وحيد .

جواب السؤال الثالث (٢٠ درجة):

5

$$\cdot \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \left\langle \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right\rangle - \left\langle \frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}\right\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\langle x+y, x+y\rangle - \frac{1}{4}\langle x-y, x-y\rangle$$

5

$$= \frac{1}{4}\left[\|x\|^2 + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \|y\|^2 - \|x\|^2 + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle - \|y\|^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle\right] = \operatorname{Re}\langle x, y\rangle$$

Scanned by CamScanner

ثمّ بيّن كيف تكتب هذه العناصر بدلالة القاعدة .
بفرض أنّ h_1,h_2,h_3 هي عناصر الجملة المتعامدة والتي نريد الحصول عليها. إنّ :

$$\|x_1(t)\|^2=\langle x_1,x_1\rangle=\int_{-1}^{1}t^2t^2\,dt=\frac{2}{5}\quad\Rightarrow\quad\|x_1(t)\|=\sqrt{\frac{2}{5}}$$

وبالتالي فإنّ :
$$h_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}=\sqrt{\frac{5}{2}}\,t^2$$

لنضع الآن :

$$h_2'=x_2-\langle x_2,h_1\rangle h_1=t-\left(\int_{-1}^{1}t\,(\sqrt{\frac{5}{2}}t^2)dt\right)\times\sqrt{\frac{5}{2}}\,t^2=t-0=t$$

$$\|h_2'\|=\sqrt{\langle h_2',h'\rangle_2}=\left(\int_{-1}^{1}t^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

وبالتالي فإنّ :
$$h_2=\frac{h_2'}{\|h_2'\|}=\sqrt{\frac{3}{2}}t$$

لنضع الآن :

$$h_3'=x_2-\langle x_3,h_2\rangle h_2-\langle x_3,h_1\rangle h_1$$

$$=1-\overbrace{\left(\int_{-1}^{1}1.(\sqrt{\frac{3}{2}}t)\,dt\right)}^{0}\times\sqrt{\frac{3}{2}}t^2-\overbrace{\left(\int_{-1}^{1}1.(\sqrt{\frac{5}{2}}t.dt\right)}^{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}}\times\sqrt{\frac{5}{2}}t^2=1-\frac{5}{3}t^2$$

$$\|h_3'\|=\sqrt{\langle h_3',h_3'\rangle}=\left(\int_{-1}^{1}(1-\frac{5}{3}t^2)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

2

$$=\left(\int_{-1}^{1}(1+\frac{25}{9}t^4-\frac{10}{3}t^2)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

وبالتالي فإنّ :
$$h_3=\frac{h_3'}{\|h_3'\|}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(1-\frac{5}{3}t^2\right)$$

وبذلك نكون قد حصلنا على الجملة الآتية :

$$h_1=\sqrt{\frac{5}{2}}t^2\quad,\quad h_2=\sqrt{\frac{3}{2}}t\quad,\quad h_3=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(1-\frac{5}{3}t^2\right)$$

نلاحظ أنّ :

$$\|h_1\|=\left(\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}t^4\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$$

2

$$\|h_2\|=\left(\frac{3}{2}\int t^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$$

Scanned by CamScanner

$$\|h_3\| = \left(\frac{9}{8}\int_{-1}^{1}(1-\frac{5}{3}t^2)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

2

$$\langle h_1, h_2\rangle = \frac{\sqrt{15}}{2}\int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0$$

$$\langle h_1, h_3\rangle = \frac{3\sqrt{5}}{4}\int_{-1}^{1} t^2\left(1-\frac{5}{3}t^2\right)dt = 0$$

$$\langle h_2, h_3\rangle = \frac{3\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{1} t\left(1-\frac{5}{3}t^2\right)dt = 0$$

وبالتالي فإنّ الجملة التي أوجدناها متعامدة نظاميّة وتامّة بحسب طريقة شميث .

لدينا : 2

$$h_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \Rightarrow x_1 = \|x_1\|.h_1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}.h_1$$

كما أن : 2

$$h_2 = \frac{h_2'}{\|h_2'\|} = \frac{x_2 - \langle x_2, h_1\rangle h_1}{\|h_2'\|} \Rightarrow$$

$$x_2 = \langle x_2, h_1\rangle h_1 + \|h_2'\|.h_2 \Rightarrow$$

$$x_2 = 0.h_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}h_2$$

وأيضاً : 2

$$h_3 = \frac{h_3'}{\|h_3'\|} = \frac{x_3 - \langle x_3, h\rangle_2 h_2 - \langle x_3, h_1\rangle h_1}{\|h_3'\|} \Rightarrow$$

$$x_3 = \langle x_3, h_1\rangle h_1 + \langle x_3, h_2\rangle h_2 + \|h_3'\|.h_3 \Rightarrow$$

$$x_3 = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}.h_1 + 0.h_2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}h_3$$

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

د. سامي العرجة

٢٠١٢/٩/١٧

Scanned by CamScanner

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٤-٢٠١٥ المدة : ساعة ونصف
أسئلة مقرر التحليل التابعي (١) العلامة:(١٠٠) درجة
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي الاسم :

السؤال الأول (٢٠ درجة):

أ)- اذا كان g , f تابعان عقديان وكمولان حسب ستيلجس بالنسبة للدالة المتزايدة h على $[a,b]$ ،ومن أجل $1<p<\infty$ و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ عندئذ أثبت أن :

$$\int_a^b |f(x).g(x)|dh(x) \le \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dh(x)\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_a^b |g(x)|^q \, dh(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

ب)- أثبت أن كل فضاء خطي منظم منتهي البعد هو فضاء باناخ . ومتى الفضاء التبولوجي الخطي قابل للتنظيم .

السؤال الثاني (٢٠ درجة):

أ)- أثبت أن الفضاء ℓ_p حيث $(p\neq 2)$ ليس فضاء هيلبرت ، وهل هو فضاء باناخ (بدون اثبات).

ب)- في الفضاء $L_2[-\pi,\pi]$ تشكل العناصر :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},......,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},.....$$

جملة متعامدة نظاميّة ، والمطلوب بيّن أن الجملة تامة وأن متسلسلة فورييه للتابع $f(x)$ من الفضاء $L_2[-\pi,\pi]$

لها الشكل : $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ ، وما هي صيغة مساواة بارسيفال عندئذ ؟

السؤال الثالث (٢٠درجة):

أ)- أوضح أن كل من المجالين $]0,1[$ و $[0,\infty[$ هوميومورفيان فيما بينهما مع التطبيق $f(x)=\frac{x}{1-x}$.

ب)- ليكن لدينا الفضاء الخطي المنظم E ، بيّن أنه يكفي كي يكون هذا الفضاء تاماً هو أن تكون كل متسلسلة متقاربة مطلقاً فيه متقاربة.

السؤال الرابع (١٥ درجة) :

ليكن لدينا المؤثر : $A:C[0,\infty[\rightarrow C[0,\infty[$ المعرف بالشكل $Ax(t)=t\ x(t)$

أثبت أنّ المؤثّر A خطي وغير محدود و لكنّه مغلق .

السؤال الخامس (١٠+١٥= ٢٥ درجة) :

١- ليكن E فضاء خطياً منظماً .عرف الفضاء المرافق E^* ثم أثبت أن E^* فضاء تاماً .

٢- أوجد الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء $\mathbb{R}^n$ إذا أخذنا النظيم في $\mathbb{R}^n$ من الشكل:

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

انتهت الأسئلة

مدرسا المقرر

حمص في ١٧ / ٦ / ٢٠١٥ م. مع التمنيات بالنجاح والتوفيق د. سامح العرجة ، د. محمد عامر

Scanned by CamScanner